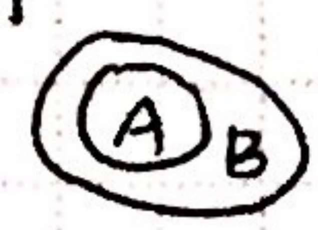
一、集合

一、表示

1. { } A、B…(大写)
2. 元素 a、b…(小写)
   $a\in A$ $b\notin B$
3. 特征、限制解
   $\{x|y=\sin x\}$
   $\{y|y=\sin x\}$
   $\{(x,y)|y=\sin x\}$

二、集合运算

1. 子集  $A\subseteq B$
   ▶ A集合中有n个元，子集数2^n
2. 交集 
   $A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$
3. 并集 
   $A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$
4. $C_B A=\{x|x\in B$且$x\notin A\}$

▶ 关注数形结合和分类讨论

三、四种命题

四、"量词"下的否定

$\forall x\in R$, $\sin x\le 1$

$\Rightarrow \exists x_0\in R$, $\sin x>1$

五、命题的真假判定

$\neg p$ 非 $p\vee q$ 或 $p\wedge q$ 且

▶ p: $\frac{1}{2x-1}\ge 0$ $x>\frac{1}{2}$

$\neg p$: $\frac{1}{2x-1}<0$ ✗ $x\le\frac{1}{2}$ ✓

六、充要条件

1. 定义法 $A\Rightarrow B$
2. 集合法 

二、函数

一、定义域

1. 显函数 $\begin{cases}\text{分母}\\\text{真数}\\\text{被开方数}\end{cases}$
2. 抽象函数
   ▶ $f(2x-1)$的定义域是$[0,1]$
   $\Rightarrow -1\le 2x-1\le 1$
   求$f(2^x)$的定义域
   $\Rightarrow -1\le 2^x\le 1 \Rightarrow x\in\cdots$
3. 定义域应用
   ▶ $f(x)=\sqrt{ax^2-(2a-1)x+1}$ 定义域为R
   $\Rightarrow$ ~~f(x)=~~ 令$ax^2-(2a-1)x+1\ge 0$
   对任意$x\in R$均成立

二、值域(最值)

1. 配方法(二次型或换元二次型)
   ▶ $f(x)=x+\sqrt{x}-1$ 令$\sqrt{x}=t\ge 0$
   $f(x)=4^x+2^{x+1}-3$
   $f(x)=\sin x+\cos^2 x$
2. 分离分数法(分式型)
   ▶ $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=2+\frac{-3}{x+1}$
   $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}$
3. 单调性法(复合式) 同增异减
   ▶ $f(x)=\log_2\frac{2x-4}{x+1}$
4. 均值法(多元函数)
5. 大鲨鱼通吃法 导数法

三 表达式

1. 求解析式

①待定系数法（函数名已知）

②换元法（复合函数）

▶ $f(2x-1)=x^2-1$ 求 $f(x)$

③拼凑法（关注结构）

▶ $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$

④构造法

▶ $\left.\begin{array}{l} af(x)+f(\frac{1}{x})=ax \\ af(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{a}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\cdots$

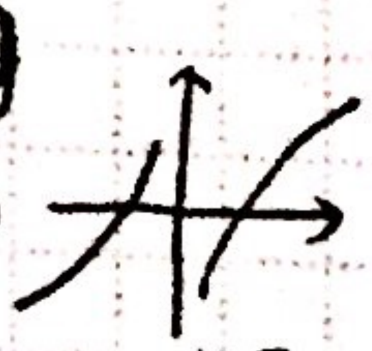
2. 求函数值或参数范围

①分段函数

▶ $f(x)=|2x-1|+|x-1|$

▶ $f(x)=x+\frac{k}{x}\ (k>0)$

▶ $f(x)=x-\frac{k}{x}\ (k>0)$



②抽象函数（赋值法、模型法）

③复合函数

拆分为2个函数 $f[g(x)]$

$g(x)$ 值域 $\subseteq f(x)$ 定义域

四 单调性

1. 定义 $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ↑

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ ↑

$f'(x)\geq 0$ ↑

2. 判定或证明单调区间

①定义法 作差→分解/配方→判定符号

②导数法

③复合法（同增异减） *注意定义域

▶ $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5)$

④图解法

3. 利用单调性求解

①比大小

②求最值

③求取值范围（与不等式、恒成立联系）

五 奇偶性 *定义域关于原点对称

1. 定义 $f(-x)=-f(x)$ 奇

图像关于原点对称

2. 常用结论

①二次函数为偶函数 $\Rightarrow b=0$

② $f(x)=\log_2\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow$ 奇

③ $f(x)=e^x+e^{-x} \Rightarrow$ 偶

④ $f(x)=e^x-e^{-x} \Rightarrow$ 奇

⑤ $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-2^x} \Rightarrow$ 奇

六 周期性

$f(x+T)=f(x)$

▶ $f(x+a)=-f(x)$ $T=2a$

▶ $f(x+b)=\frac{1}{f(x)}$ $T=2b$

七 对称性

$f(-x)=f(x)$ $x=0$

▶ $f(a-x)=f(b+x)$ $x=\frac{a+b}{2}$

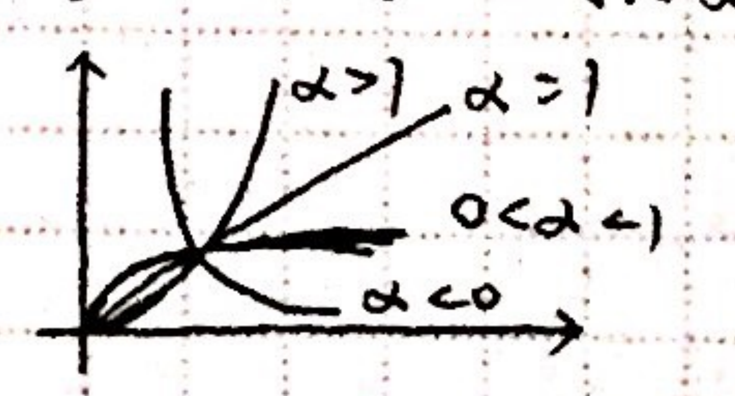
$f(-x)=-f(x)$ $(0,0)$

▶ $f(a-x)=b-f(a+x)$ $(a,\frac{b}{2})$

几种函数

㊀ 幂函数

$f(x)=x^{\alpha}$（α 为有理数）



㊁ 二次函数

1. 解一元二次不等式

先令二次项系数>0 → 分解求根 → 口诀

▶ $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(1,3)$，求 $cx^2-bx+a>0$ 的解集

$(x-1)(x-3)<0 \Rightarrow x^2-4x+3<0$

$-x^2+4x-3>0$

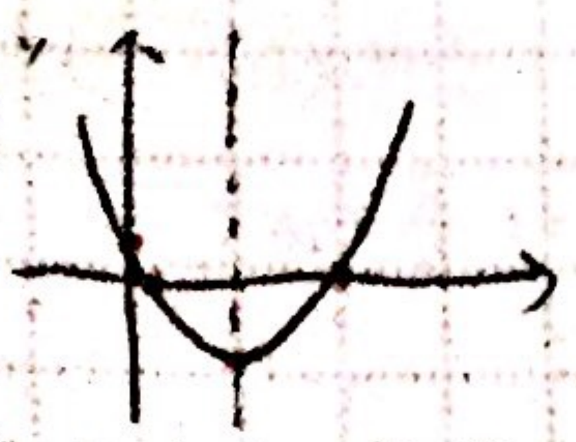
令 $a=-k$，$b=4k$，$c=-3k\ (k>0)$

$-3kx^2-4kx-k\geq 0$

$\Rightarrow 3x^2+4x+1\leq 0 \Rightarrow x\in$

2、图象与性质

"四点一线"



①利用图象求参数范围

②根的分布

3. 最值与恒成立

①配方

②独立参数

三 指对数函数

1. 指对数运算 基本

①法则：指→乘除

对→加减

化归与转换

2.（复合）指对数性质研究

①定义域

②关注底（分类）

③"换元"为二次函数

八 基本函数图象

1. 五种基本函数

2. ▸ $f(x)=|2x-1|$

▸ $f(x)=x+\frac{k}{x}\ (k>0)$

▸ $f(x)=x-\frac{k}{x}\ (k>0)$

九 平移变换

▸ $f(2x)\to f(2x-1)$

▸ $f(-x)\to f(-x-2)=f[-(x+2)]$

十 翻折（绝对值）变换

▸ $f(|x|)$ ▸ $|f(x)|$

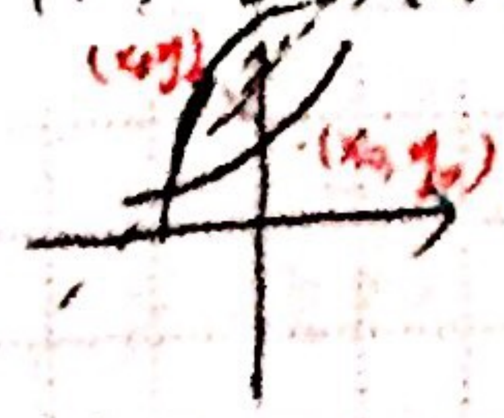
十一 对称变换

▸ $f(x)=2^x$ 关于 $y=x$ 对称 $\Rightarrow g(x)=\log_2 x$

▸ $f(x)=2^{x-3}+\frac{1}{2}$ 关于 $y=x$ 对称

$y=2^{x-3}+\frac{1}{2}\Rightarrow x=2^{y-3}+\frac{1}{2}\Rightarrow y=\log_2(x-\frac{1}{2})+3$

▸ $f(x)=2^x$ 关于 $y=x+3$ 对称



$$\begin{cases}\frac{y_0-y}{x_0-x}=-1\\ \frac{y+y_0}{2}=\frac{x+x_0}{2}+3\end{cases}$$

十二 零点

1 直接求

2 $f(a)\cdot f(b)<0$ 只能确定有零点

*连续函数！

3 分为两函数交点问题

*最好一个函数为常数函数

4 导数研究

三、导数

一 $k=f'(x_0)\to$ 切线的斜率

二 $(\cos x)'=-\sin x\to(\tan x)'=$

$(\log_2 x)'=(\frac{\ln x}{\ln 2})'=\frac{1}{x\ln 2}$

$(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}$

三 定积分 < 求原函数 / 几何意义

四 如何求导函数（含参）正负

1. 恒正或恒负

2. 分解求根 < 比较根的大小 / 比较根与定义域

确定分类标准

3. 分不了 → 二阶导 / 分别判定（分离函数） / 放缩函数

四、三角

一 定义与同角关系

1. 角的表示 → R

① π — $180°$

$\frac{\pi}{3}$ — $60°$　$\frac{\pi}{12}$ — $15°$

$\frac{\pi}{6}$ — $30°$　$\frac{\pi}{15}$ — $12°$

② $\beta = \alpha + 2k\pi,\ k\in Z$

③

象限角

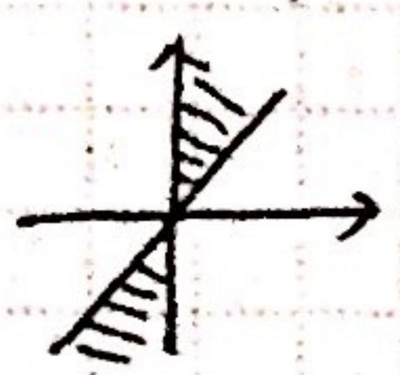
轴限线角

x轴　$k\pi$

y轴　$k\pi + \frac{\pi}{2}$

▸ $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi + 2k\pi$

$k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2}$



2. 定义

① $P(x, y)$

$r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$　$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

② 几何定义

两边之和大于第三边

▸ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$

3. 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限

▸ $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$

▸ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

▸ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\alpha = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

▸ $\sin\alpha = \sin\beta$　$\alpha = \beta + 2k\pi$ 或 $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$

▸ $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$

▸ $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{6} + \alpha)$

4. 同角关系

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$　$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

▸ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$　求 $\tan\alpha$

▸ $\tan\alpha = \frac{1}{3}$　求 $\sin\alpha$ → $\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$

齐次同除

▸ $\tan\alpha = \frac{1}{2}$　求 $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

▸ $\tan\alpha = \frac{1}{2}$　求 $\sin\alpha\cos\alpha$ → $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$

▸ $\underbrace{\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}}_{(0<\alpha<\pi)}$　求 $\tan\alpha$

① 判定范围 $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi)$

② $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{1}{3}$　齐次!!

③ $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{9}$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{17}{9}$　平方!!

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{3}$

二 恒等变换

1 公式：正用、逆用、变形用

▸ $\tan\alpha + \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)$

▸ $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

2 变形方向

① 变名称：切化弦、弦统一

② 变结构 < 分式化整式 / 降幂

▸ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$　▸ $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$

③ 变角 → 特殊角

已知角 → 单角

3 常用技巧

① 齐次同除　② 互余　③ 平方　④ 拆角

⑤ 1的代换 ▸ $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} = \tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$

⑥ 辅助角

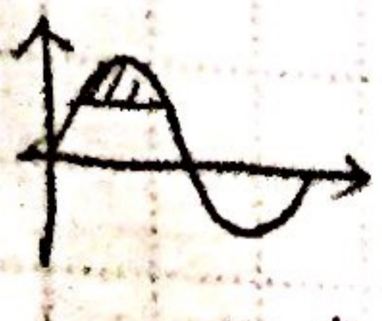
三 图象与性质

① 化为单一函数　② 标准图 & 标准图

1. 求定义域

▶ $f(x)=\sqrt{\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

令 $t=\sin(2x-\frac{\pi}{3})\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

$\Rightarrow x\in$

2 求值域(最值)

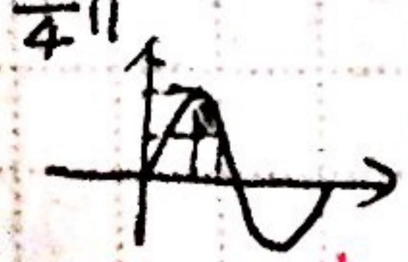
① 一次型

▶ $f(x)=\sin x+\cos x\ (\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{2})$

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\frac{\pi}{2}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{3}{4}\pi$

$\therefore f(x)\in$

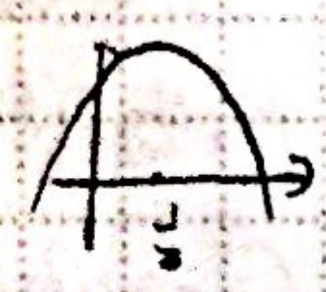


② ▶ $f(x)=\sin x+\cos^2 x$ 换元

$=\sin x+1-\sin^2 x\ (\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{\pi}{2})$

令 $\sin x=t$

$f(t)=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}$



③ 分式型

▶ $y=\frac{2-\cos x}{\sin x}\ (0<x<\pi)$

令 $y=\frac{\sin x-0}{\cos x-2}\ (0<x<\pi)$

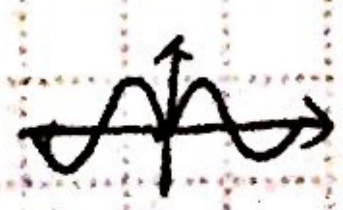
斜率

④ 导数爸爸什么时候都能用:)

3 求周期

▶ $f(x)=\overbrace{\underbrace{|\sin(2x-\frac{\pi}{3})|}_{\frac{\pi}{2}}}^{\pi}$

▶ $f(x)=\sin(|2x-\frac{\pi}{3}|)$

类比 $\sin|x|$ 

不是周期函数

4 求单调区间 复合函数

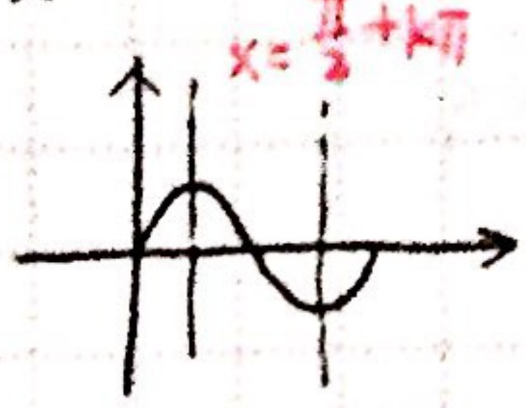
▶ $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}\underline{-2x})+1$

① 直接求

② 求导

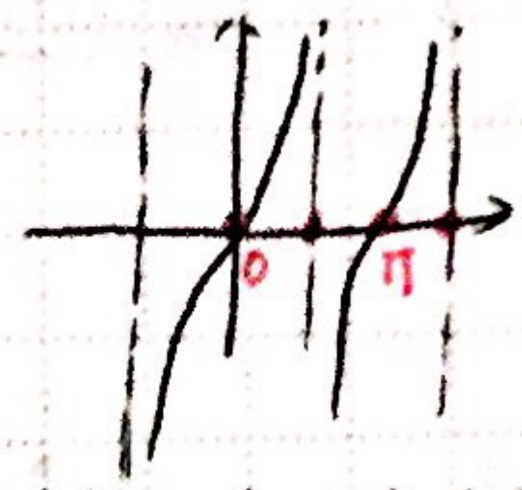
5 奇偶性(对称性)

▶ 求 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 求对称轴



令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5}{12}\pi\ (k\in Z)$ ……

▶ 

对称中心 $(\frac{k\pi}{2},0)\ (k\in Z)$

① 整体代"公式"

② 用"定义"推理 严格推理 然而傻子才用:)

▶ $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})\xrightarrow{\text{左移}\varphi}$ 为偶函数 $g(x)$

$g(x)=\sin[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{3}]$ 由 $g(-x)=g(x)$

$\sin[2(-x+\varphi)-\frac{\pi}{3}]=\sin[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{3}]$

$\Rightarrow 2(-x+\varphi)-\frac{\pi}{3}=2(x+\varphi)-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

或 $2(-x+\varphi)-\frac{\pi}{3}=\pi-2(x+\varphi)+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Rightarrow \varphi=\frac{5}{12}\pi+\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$

③ 结合图像转换

▶ 上题 $\pm1=\sin(2\varphi-\frac{\pi}{3})$

④ 特值法 + 验证

▶ $f(x)=\sin x+m\cos x$，对称轴 $x=\frac{5}{3}\pi$

$f(0)=f(\frac{10}{3})$

6 图象变换

①平移 → 提 ω

②放缩 → 不动 φ

7 求解析式 先定 ω 后定 φ

四 解三角形

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)r$

1. 正余弦定理的应用（首先判定）

① 已知边与对角 → 正弦

② 已知三边、求角 → 余弦

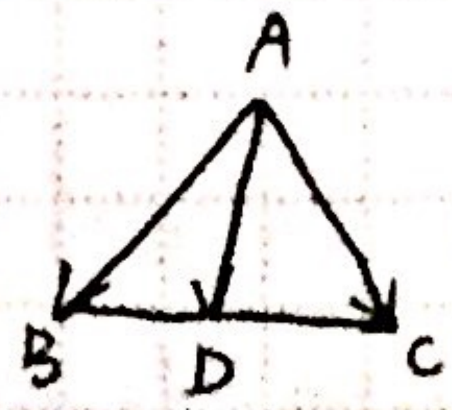
2. 通过变形求解

① 边 $\xrightarrow{\text{正弦}}$ 角 $\xrightarrow[\cos A=-\cos(B+C)]{\sin C=\sin(A+B)}$ 二角 $\xrightarrow{\text{跌条件}}$ 一角

② 角 $\xrightarrow{\text{余弦}}$ 边

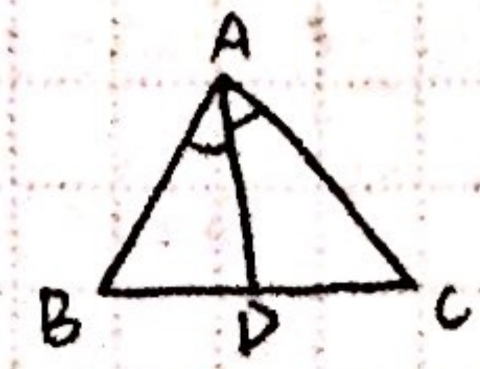
3. 三线

① 中线 < 2次余弦定理；$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$



② 高线：面积、Rt△

③ 角平分线 < 设θ；$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$



4. 若已知条件不够

① 设变量 < x、y；x、θ 建立方程

② 建立坐标系

5. 求最值（范围）

▸ $a+b=2c$ 求 $\cos C$ 的最小值

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(\frac{a+b}{2})^2}{2ab}$

$=\frac{3a^2+3b^2-2ab}{8ab}\geqslant\frac{6ab-2ab}{8ab}=\frac{1}{2}$

当且仅当 $a=b$ 时取等！！

▸ $A=\frac{\pi}{3}$ $a=6$ 求 $b+c$ 取值范围

$2R=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{12}{\sqrt{3}}$

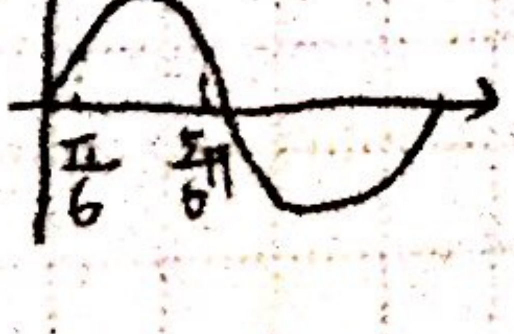
$b+c=(\sin B+\sin C)\cdot 2R$

$=[\sin B+\sin(\frac{2}{3}\pi-B)]\cdot\frac{12}{\sqrt{3}}$

$=(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B)\cdot\frac{12}{\sqrt{3}}$

$=12\sin(B+\frac{\pi}{6})$

$\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$



$\therefore b+c\in(6,12]$

① 均值法（确定取等条件）

② 化一法（结合图象）

五、平面向量

一 向量概念

大小（模）、方向

零向量　单位向量　平行向量

$\vec{a}$　$\vec{a}/\!/\vec{b}$　$\vec{a}\perp\vec{b}$

共线

零向量与任何向量都是平行向量

二 线性运算 $\vec{a}\pm\vec{b}$　$\lambda\vec{a}$

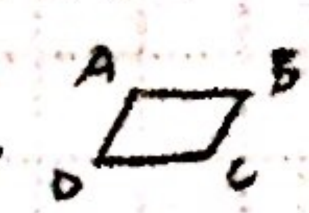
1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

2. M为AB中点 $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

3. G为△ABC重心 $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$

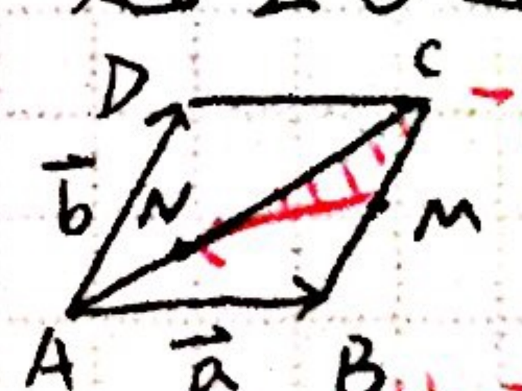
4. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ⇒



5. A、B、C共线 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{PA}+\mu\overrightarrow{PB}\ (\lambda+\mu=1)$

题型 ① 通过"变形"处理线性运算

一同起点、二同直线、三同三角形

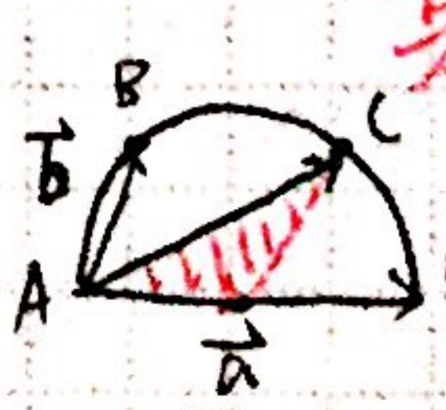


$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

基底法

$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$



$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

② 通过"共线"定理求参数值

三 坐标运算

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{a}/\!/\vec{b}\Rightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow x_1y_1+x_2y_2=0$

1. 数量积及其运算

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

① 证平行 ⇒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

② 证垂直 ⇒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

③ 求长度 ⇒ $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

④ 求角度 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 不一定锐角

方向：向量法（几何）

坐标法（代数）

①借用图解

②借用垂直

③借用模长

六、数列

一 数列与函数

1. 表示 a_n S_n

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq2)\end{cases}$$

2. 特殊函数（离散型函数）

①单调性 ②最值 ③周期性

作差（商）　不完全归纳法 $a_{n+k}=a_n$

二 等差、比

1. 定义

$a_{n+1}-a_n=d$ → >0 ↑；$=0$ 常数列；<0 ↓

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$　$q\neq0$　$a_n\neq0$

中项 $2b=a+c$；$b^2=ac$

2. 公式

$a_n=a_1+(n-1)d$；$a_n=a_1q^{n-1}$

$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1)\end{cases}$

3. 性质

公差

▸ $a_n=3n-1$　▸ $a_n=(\frac{1}{2})^n$

▸ $S_n=2n^2+3n$　▸ $S_n=Aq^n+B$

$(A+B=0)$

等差数列的和是不含常数的二次式

☺ 题型与方法

1. 求解 → 方程法；→ 性质法

2. 证明（判定）→ 定义法；→ 中项法；→ 特值＋证明

3. 应用

①等差　和的最值

②等比　增长率

三 求通项（递推）

1. 单独出现 S_n ⟶ $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq2\end{cases}$

2. a_{n+1} 与 a_n 递推式

① 累加、累乘　▸ $a_{n+1}-a_n=2n$

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

② 待定系数/项

▸ $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1$

$(a_{n+1}+\lambda)=\frac{1}{3}(a_n+\lambda)$

▸ $a_{n+1}=2a_n-n+1$

$[a_{n+1}-(n+1)]=2(a_n-n)$

③ 打乱结构（左右结构不和谐）

▸ $2a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ ⇒ $\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=2$

▸ $a_{n+1}=\frac{na_n}{n+1+a_n}$ ⇒ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{n+1+a_n}{na_n}$

④ 换元

▸ $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3^n}$

⇒ $3^{n+1}a_{n+1}=3^na_n+3$

▸ $a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n+1}+1$

⇒ $a_{n+1}+1=(a_n+1)+2\sqrt{a_n+1}+1$

⇒ $a_{n+1}+1=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$

⑤ 取对数

▸ $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$ ⇒ $a_{n+1}+1=a_n^2+2a_n+1$

⇒ $a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$ ⇒ $\ln(a_{n+1}+1)=2\ln(a_n+1)$

⇒ $b_{n+1}=2b_n$

3. 含 a_n S_n (和、积) ⇒ 退项法

▸ $a_n = 2S_{n+1}+1$

$a_{n-1} = 2S_n+1 \ (n \ge 2)$

$a_n - a_{n-1} = 2a_{n+1}$

四 递推数列求和 (先确定通项)

1 通项 = 等差 + 等比 ⇒ 分组求和

$(-1)^n$ ⟹ 并项求和

2 通项 = 分式 裂项求和

3 通项 = 等差 × 等比 ⇒ 错位相减

▸ $a_n=(2n-1)\times 3^n$

乘公比 $S_n = 1\times3^1+3\times3^2+5\times3^3+\dots+(2n-1)\times3^n$

$3S_n = 1\times3^2+3\times3^3+5\times3^4+\dots+(2n-1)\times3^{n+1}$

一 不等式性质、解不等式

1 利用性质比大小(特值法)

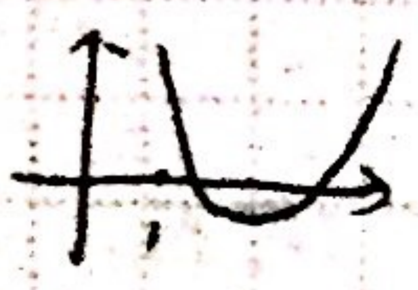
2 三个二次的关系

①解一元二次

二次项系数 >0 ⇒ 分解求根 ⇒ 口诀

②根的分布

▸ $x^2-mx+2m-1=0$ 两根大于1



$\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{m}{2}>1\\ f(1)>0\end{cases}$

3 指对不等式解法

①同底法 ②分段法

4 分式不等式

移项化一边为零 ⇒ 分式判定转为乘

▸ $\frac{2x-1}{x}\ge1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x}-1\ge0$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x}\ge0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)x\ge0\\ x\ne0\end{cases}$

5 综合应用 —恒成立 —存在 (最值)

七、不等式

二 均值不等式

1 $a+b\ge2\sqrt{ab}$ $(a>0, b>0)$

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 对一切实数都成立

▸ $\sin x+\frac{2}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$

▸ $2x+y=1$ 求 xy 最大

$xy = \frac12\cdot(2xy)\le\frac12\cdot\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2$

▸ $2x+y=1$ 求 $\frac1x+\frac1y$ 最小值

同乘

$\left(\frac1x+\frac1y\right)(2x+y)=3+\frac yx+\frac{2x}{y}$

▸ $2x+y=1$ 求 $x+\frac1y$ $(x,y>0)$

$x+\frac1y=\frac12(2x-1)-\frac{1}{1-2x}+\frac12$ 换元消

▸ $x+2y=3$ 求 $\frac{1}{x-y}+\frac{9}{x+5y}$

$\frac{1}{x-y}+\frac{9}{x+5y}=\frac16\left(\frac1{x-y}+\frac9{x+5y}\right)(2x+4y)$

$=\frac16\left(\frac1{x-y}+\frac9{x+5y}\right)[(x-y)+(x+5y)]$

三 线性规划

1 截距型 —作平行线

2 斜率型

▸ $z=\frac{2y+1}{x-1}=\frac{2(y+\frac12)}{x-1}$

▸ $z=\frac{2y+x}{x-1}=\frac{2y+(x-1)+1}{x-1}$

▸ $z=\frac{2y+x}{x+y}=\frac{2\frac yx+1}{1+\frac yx}$

3 距离

八、解几

一 直线

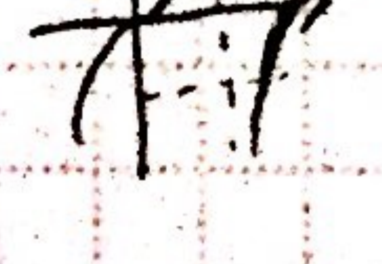
1. 倾斜角、斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ $(x_1\ne x_2)$

$0\le\theta<\pi$ $k=\tan\theta$ $(\theta\ne90^\circ)$

▸ $\sin\theta\cdot x+y-1=0$ 求倾斜角

$y=-\sin\theta\, x+1$ $k\in[-1,1]$

∴ $\tan\theta\in[-1,1]$



2 两直线位置关系

平行 $k_1=k_2$ 　$A_1B_2-A_2B_1=0$

垂直 $k_1\cdot k_2=-1$ 　$A_1A_2+B_1B_2=0$

→检验

相交定点 ▸ $2x-my+m-1=0$

$(\frac{1}{2},1)$

3 直线方程 (待定系数法)

①点已知 → 点斜式 (k存在性)

②斜率已知 → 斜截式

一般式 (标准化)

▸ $-\frac{1}{2}x-3y+2=0$ (×)

$x+6y-4=0$ (√)

③平行线系、垂直线系、交点系

▸ 一条直线~~过2x+3~~ 与 $2x+3y-6=0$ 平行，且过 $(2,1)$，求..

设 $2x+3y+m=0$

▸ 过 $x+y-1=0$ 与 $2x-3y+2=0$ 的交点且与 $x+2y-1=0$ 垂直直线?

设 $(x+y-1)+\lambda(2x-3y+2)=0$ 交点系

$\Rightarrow (1+2\lambda)x+(1-3\lambda)y+○=0$

$\therefore 1\times(1+2\lambda)+2(1-3\lambda)=0$

4 距离与对称

▸ $2x+3y-1=0$ 关于原点对称

$-2x-3y-1=0$

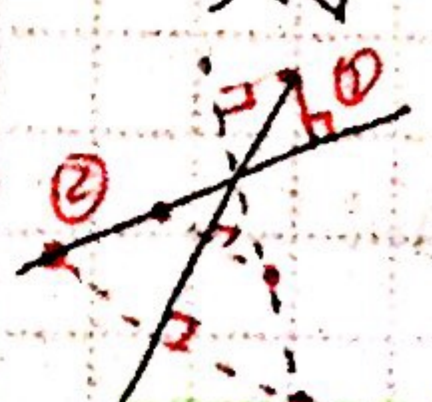
▸ 关于 $y=x$ 对称 $2y+3x-1=0$

~~关于(1,2)对称~~

▸ 关于 $(1,2)$ 对称 $2x+3y+m=0$

在 $2x+3y-1=0$ 中找个点代入

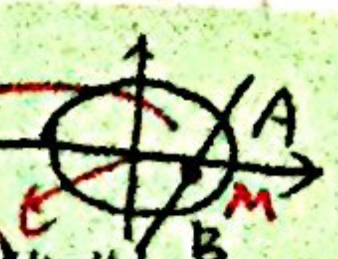
▸ 关于 $x+y-2=0$ 对称



①用距离

②两点做

点差法 有中点时用



$$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=\frac{(y_1+y_2)(y_2-y_1)}{b^2}$$

$\Rightarrow k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

二 圆

1 圆的方程

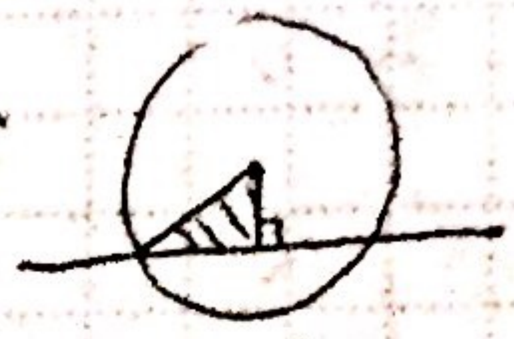
① $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

② $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(\frac{D^2+E^2-4F}{4}>0)$

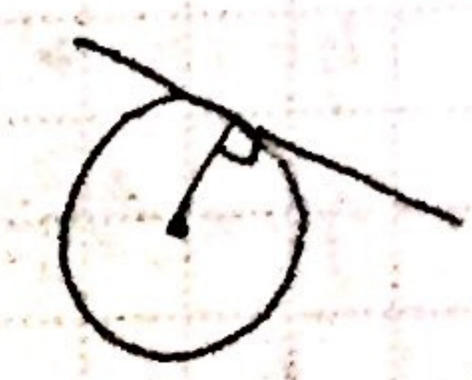
$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$

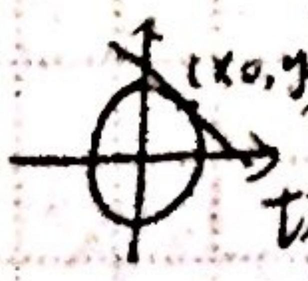
③ $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=a+r\sin\theta\end{cases}$ → 求最值

2 弦长



3 切线 → $d=r$ → 垂直





切线 $x_0x+y_0y=r^2$

4 两圆关系 圆心距与半径

圆1：$x^2+y^2=9$

圆2：$(x-2)^2+y^2=4$

相减

$\Rightarrow$ 相交弦 $4x=9$

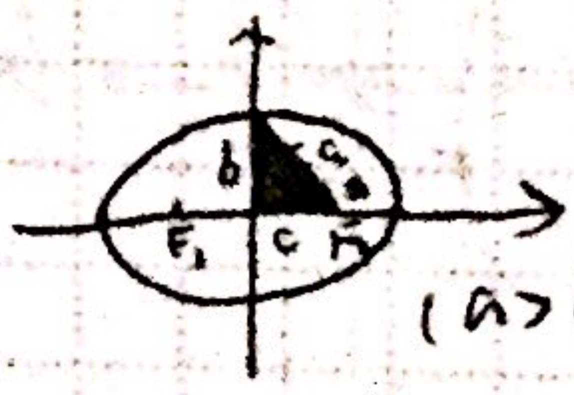
三 椭圆 ①图解 ②先构法 ③方程法

1 定义 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ $(2a>|F_1F_2|$

$(2a=|F_1F_2|$ 　　$2a<|F_1F_2|$ $)$

2 方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=b^2+c^2$



$(a>b>0)$

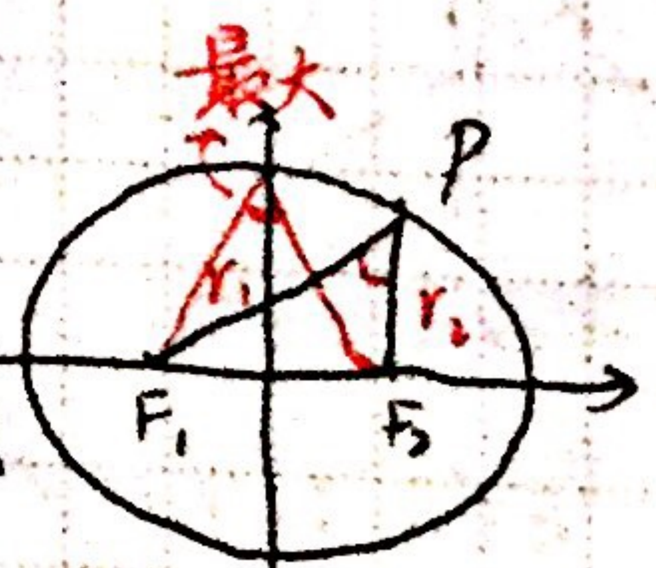
3 性质

① 离心率 $e=\frac{c}{a}<1$

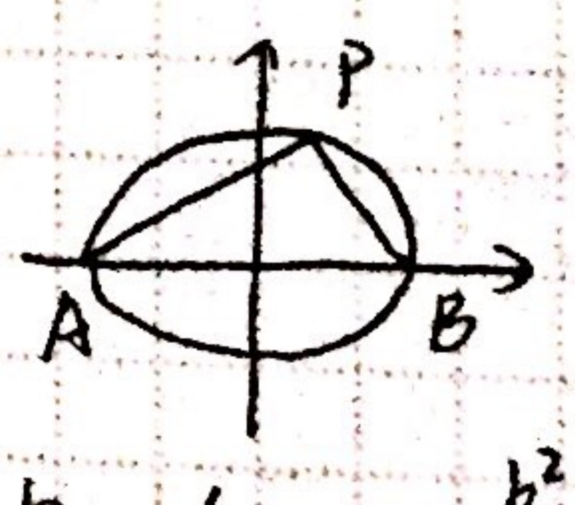
$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-(\frac{b}{a})^2$

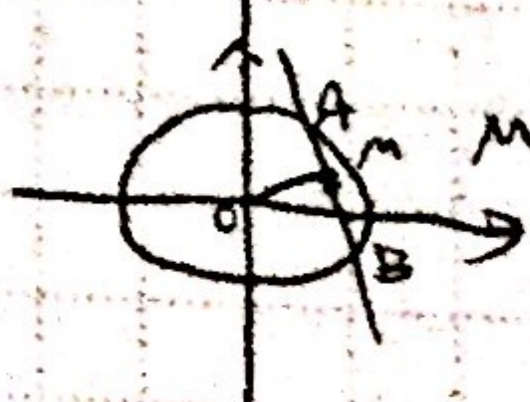
②焦点三角形

$a-c<r<a+c$



③中点、焦交点、切线

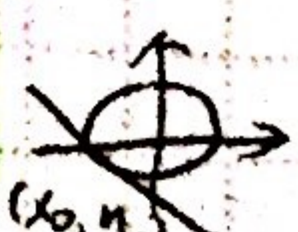




M为AB中点

$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{b^2}{a^2}$

$k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$



切线 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$

四 双曲线

1 定义 $||PF_1|-|PF_2||=2a$ $(2a<|F_1F_2|)$

$2a=|F_1F_2|$ → 射线 $2a>|F_1F_2|$ ×

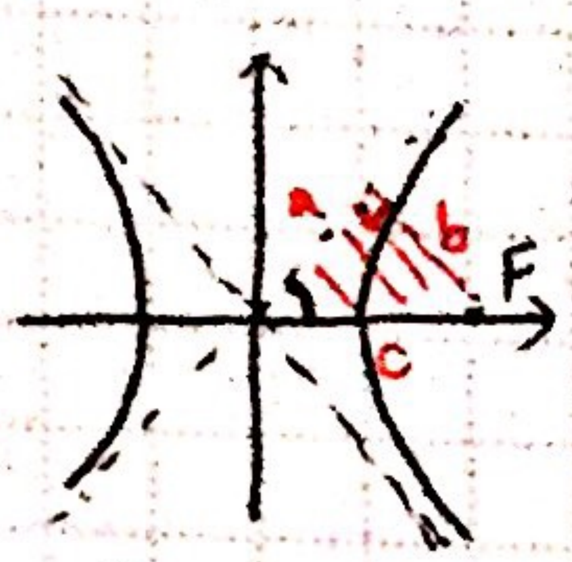
2 方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$

3 性质

① 渐近线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$y=2x \to y^2-4x^2=\lambda$

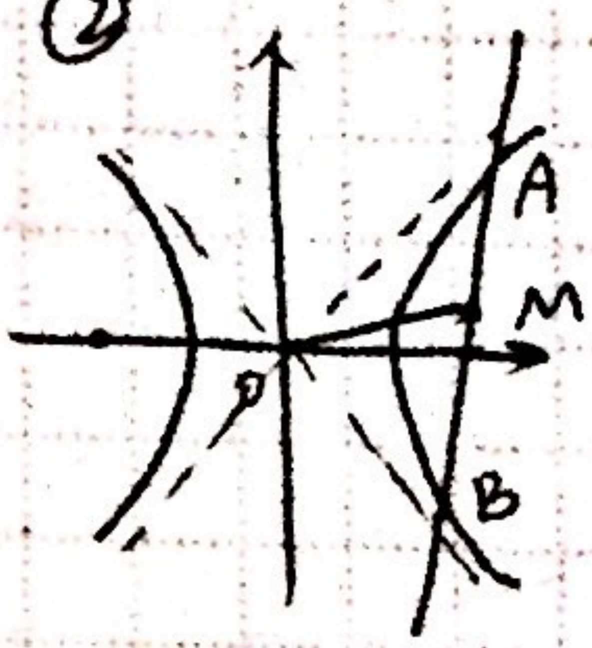
焦点到渐近线的距离为 b



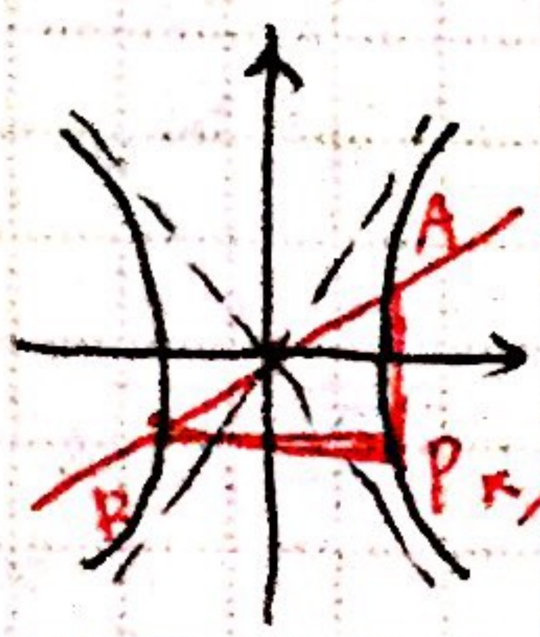
夹角 → e

等轴双曲线 $y=\pm x$

②

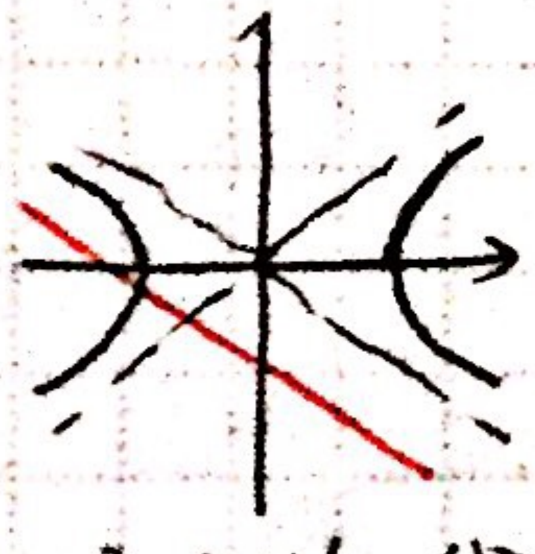


$k_1 \cdot k_2=\frac{b^2}{a^2}$



$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}$

P 任意一点



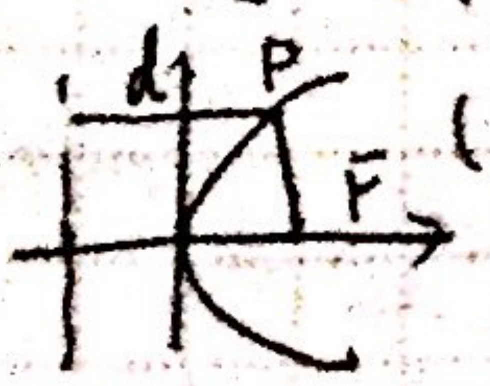
一交点

$\Delta=0$

与渐近线平行

五 抛物线

1 定义 $|PF|=d$

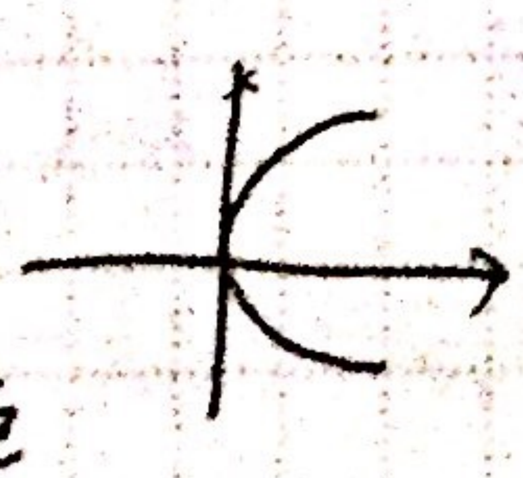


(F不在 l 上)

2 方程

$y^2=2px$

P 焦准距

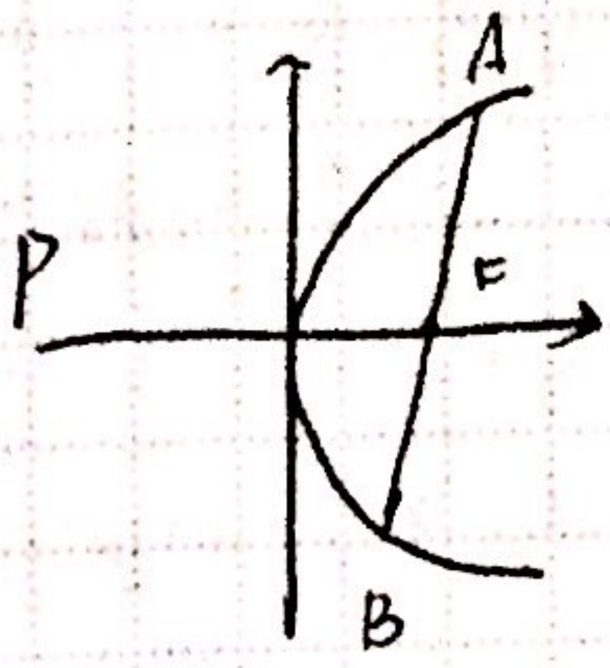


3 性质

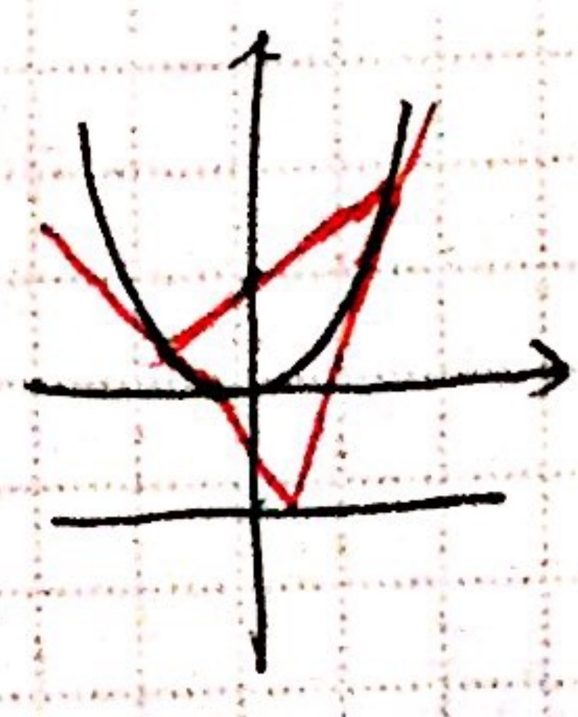
① $|AB|=x_1+x_2+p$

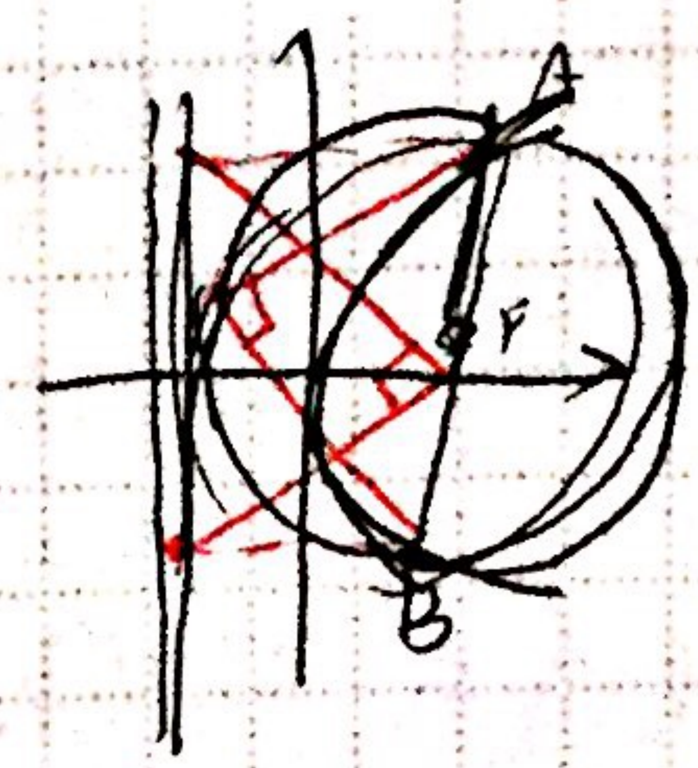
② $x_1x_2=\frac{1}{4}p^2$

$y_1y_2=-p^2$



③ AB为直径的圆与准线相切





六 直线与圆锥曲线

1 判定位置关系(切线)

① 直线与椭圆 → Δ法

② 直线与双曲线一交点 → $\Delta=0$

与渐近线平行

③ 直线与抛物线一交点 → $\Delta=0$

与轴平行

2 求方程(待定系数法)

先定型　　直线(三种)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$mx^2+ny^2=1$

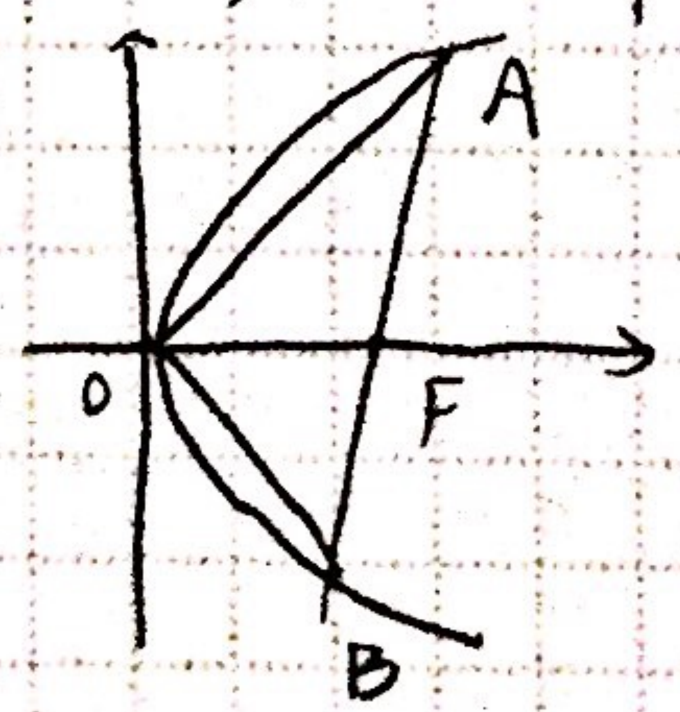
3 弦长与面积

① $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

② 交点弦 → 定义

③ 中点弦 → 点差法

④ 参数 t 　P定义



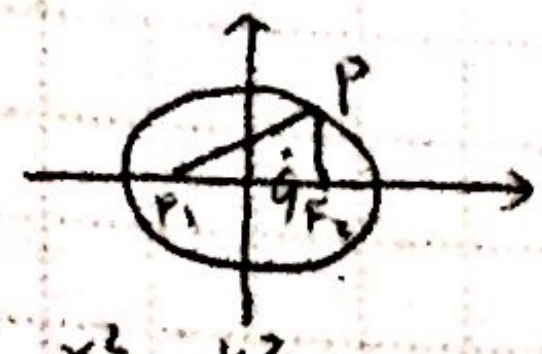
$S_\Delta=\frac{1}{2}|OF||y_1-y_2|$

4 轨迹方程（设点(x,y)→当已知代） 抛未点、

① 直接法＋向量

② 代入法

▶ 求重心轨迹



$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

设动点
求动图
代定线

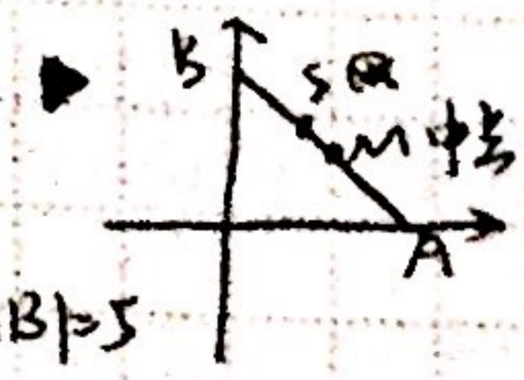
③ 定义法

▶ $5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|3x+4y+12|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\frac{|3x+4y+12|}{5}$

到定点距离＝到直线距离

④ 参数法→消参

▶ 

$|AB|=5$

$y=kx+b\ (k<0)$

$A(-\frac{b}{k},0)\ B(0,b)$

$\frac{b^2}{k^2}+b^2=25$

$M(-\frac{b}{2k},\frac{b}{2})$

另.  定值

★ 取值范围与最值

① 几何法＋定义法（小题）

② （曲线上一动点）参方、三角

③ 建立另一参数(k,y_0)

函数→分离均值 / 导数

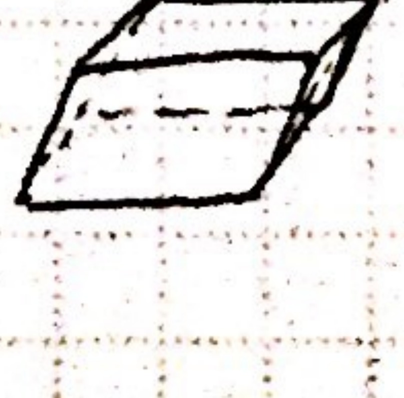
九、立几

一 认识多面体、旋转体

1 锥→台 

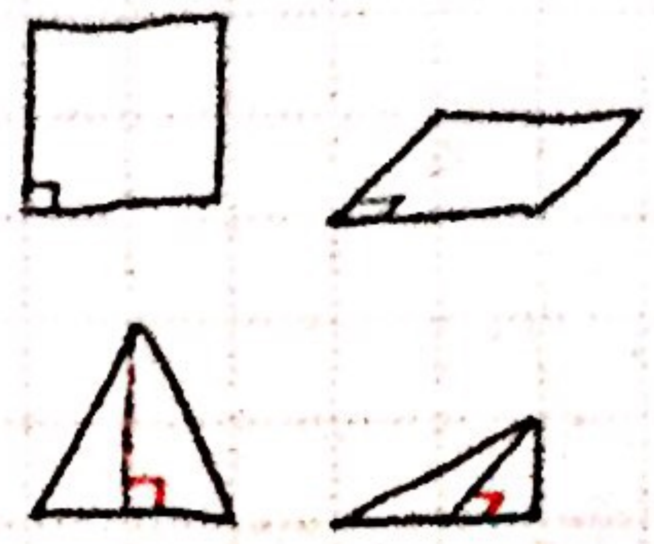
2 正三棱锥、正三棱锥、正四面体
正直

3 正四棱柱 长方体、平行六面体
底面正方形



4 旋转体→轴截面

二、三视图 斜二侧图

1  长不变、棱减半 90°→45°

2. 正投影

① 

作投影
侧视图
正视图

② 放到长方体

先确定一个投影

三、面积、体积

1 旋转体→面积
展开图

2 多面体→体积

① 正多面体

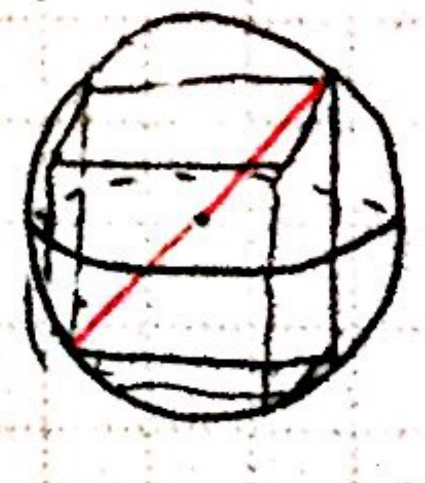
$V=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)\cdot h$

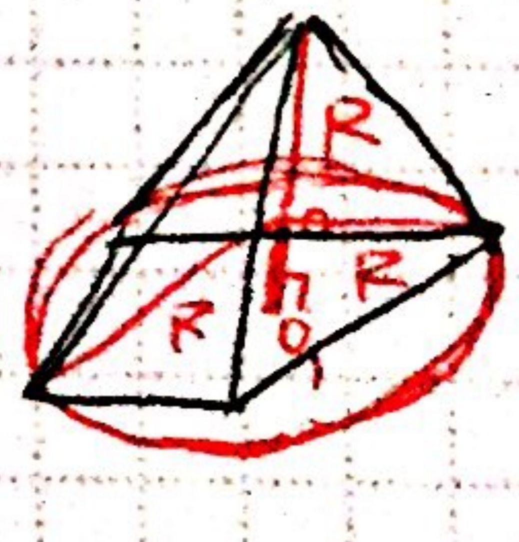
② 割补、转底

四、球 $S=4\pi R^2$
$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ $\Rightarrow R$

法一：补体

法二：作球截面垂线

 $2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



五 1.证平行

①线线 $\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ b\parallel c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel c$

②线面 $\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ a\subset\alpha\\ b\not\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$ →找线

$\left.\begin{matrix}\alpha\parallel\beta\\ a\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\beta$ →补面

③面面平行

$\left.\begin{matrix}a\subset\beta\quad b\subset\beta\\ a\cap b=P\\ a\parallel\alpha\quad b\parallel\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

2 证垂直

①线线

a. 平移 角为90°

b. 补面

②线面 →找二线

a. $\left.\begin{matrix}l\perp a\quad l\perp b\\ a\cap b=P\\ a\subset\alpha,\ b\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$

b. $\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\quad\alpha\cap\beta=c\\ l\subset\alpha\\ l\perp c\end{matrix}\right\} l\perp\beta$ →找面

③面面 $\left.\begin{matrix}l\perp\alpha\\ l\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha\perp\beta$

△ 1. 分析法

2. 作图手法

平行 → 中点(中位线)

垂直 → 等腰中线

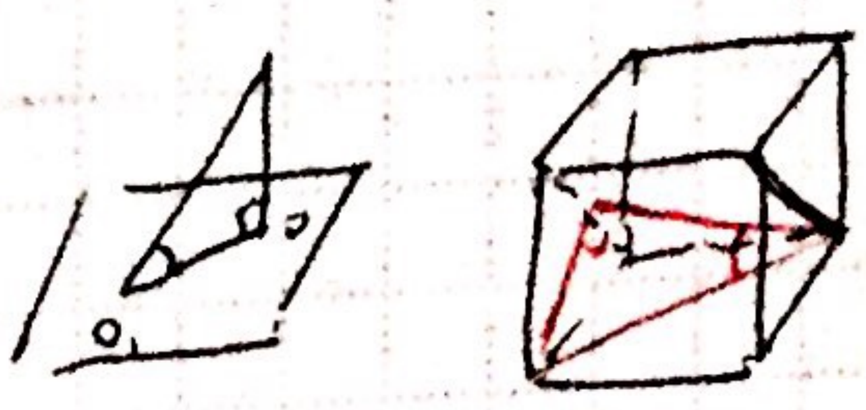
垂直 → 面面⊥

六 角度与距离

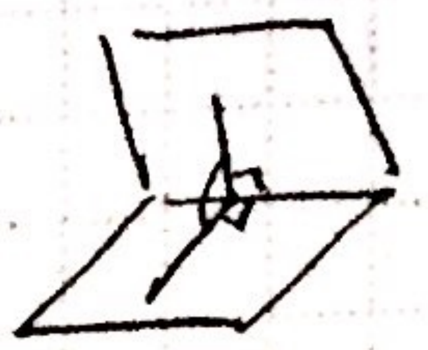
1 线线角

平移 → 构成三角形 找三边 → 余弦定理

2 线面角 $0°\le\theta\le 90°$ 找线面⊥



3 面面角



二面角

4 点面距离 → 等积法

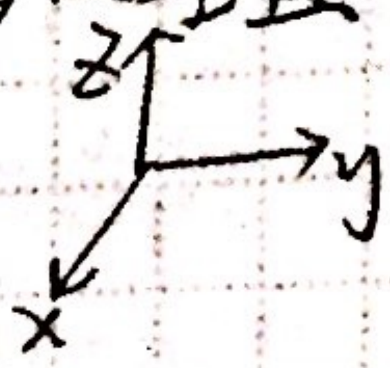
↓

线面距离

七 建系

1 证明三个两两垂直(选择一对)

2 右手系



3 求坐标

① 直接求 ② 待定系数 (λ)

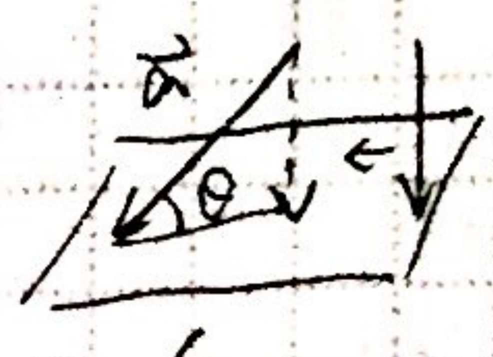
4 求法向量

寻找寻两个等式

$\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$ 令一个值为1

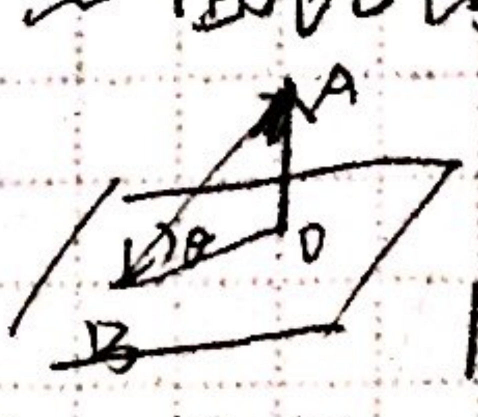
5 代公式

①线线角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\ge 0$

②  $|\sin\theta|=\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|}\right|$

③ 二面角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$ 有一个现成的

④ 点面距离

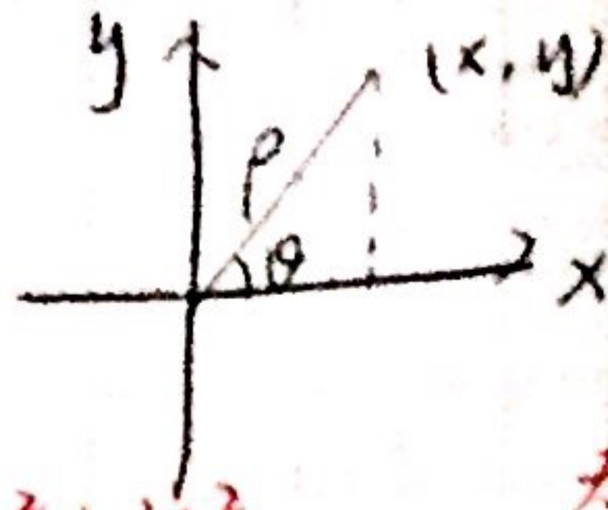


$\sin\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{AB}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{AB}|}$

$|AO|=|AB|\sin\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{AB}}{|\vec{n}|}$

6 修正答案

十、极坐标和参方



$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

规定正数

$\rho^2=x^2+y^2$

一 参数方程

$\begin{cases} x=f(t) \\ y=f(t) \end{cases}$ （t为参数）要说明

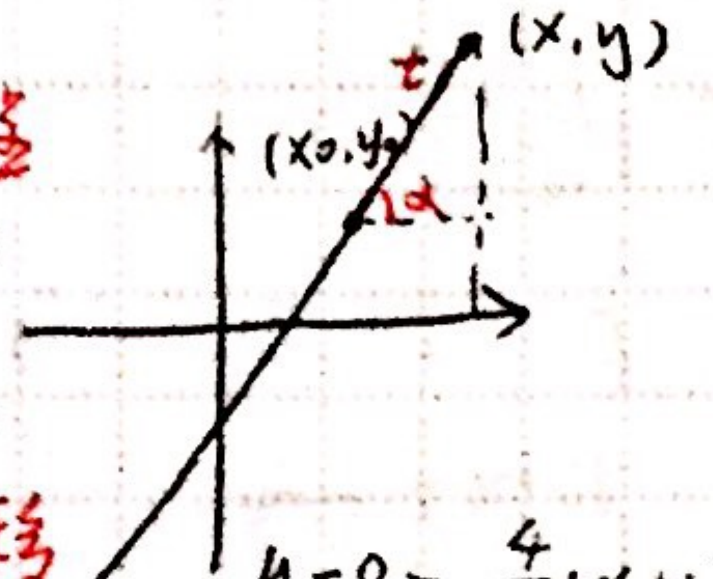
▶ $\begin{cases} x=2+\cos\theta \\ y=-1+\sin\theta \end{cases}$ 圆 余弦只能→x 正弦只能→y

▶ $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \end{cases}$

▶ $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ 椭圆

▶ 直线参数方程 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$

参数 位移



$y-0=-\frac{4}{3}(x+1)$

$\begin{cases} x=-1+\frac{3}{5}t \\ y=0-\frac{4}{5}t \end{cases}$ ✗ $\begin{cases} x=-1-\frac{3}{5}t \\ y=0+\frac{4}{5}t \end{cases}$ ✓

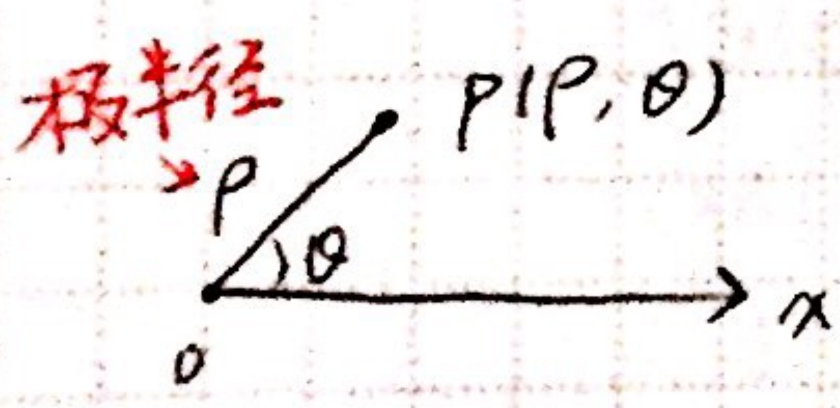
$\begin{cases} x=-1+t \\ y=0+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y=0+\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$

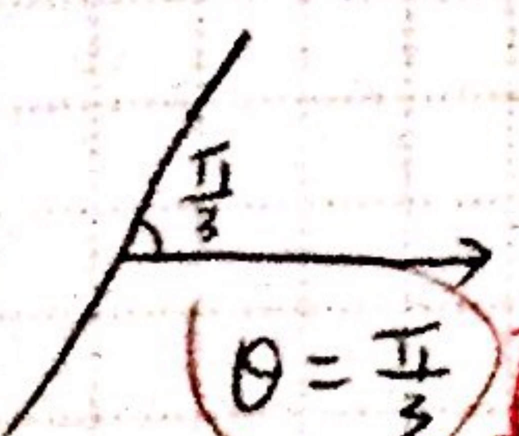
$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{5}t \\ y=0+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{5}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\frac{\sqrt{5}}{5}t \\ y=0+\frac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$

△ 标准化、互化（消参）→代入 →平方 →意义（t念义）

▶ $\begin{cases} x=\frac{2t}{1+t^2} \\ y=\frac{1}{1+t^2} \end{cases}$ 代回 $\Rightarrow \frac{x}{y}=2t \Rightarrow t=\frac{x}{2y}$

二 极坐标系





$\theta=\frac{\pi}{3}$ 直线

$\rho=1$ 单位圆

十一、不等式

一 解绝对值不等式（分段法）

▶ $|2x-1|\le|1+x|+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\frac{1}{2} \\ \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1\le x<\frac{1}{2} \\ \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<-1 \\ \end{cases}$

即 ~~$\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}$~~

综上，$x\in$

二 利用三角不等式或均值不等式求范围

$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$

a.b异号取等　a.b同号取等

$a+b+c\ge3\sqrt[3]{abc}$

三 不等式证明

1 比较法（作差商）关键.分解配方
2 综合法（利用均值）关键.整数.凑
3 分析法 关键.绝对值.根式
4 反证法
5 数归法（放缩）

十二、概率统计

一 排列组合

1 捆绑
2 插空
3 顺序

关键
① 准确分类
② 先分后排
③ 特殊元素先考虑

二 平均分堆 e.g. $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}$

三. 二项式定理

1 通项公式 $T_{r+1}=C_n^r a^{n-r} b^r$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^n a^0 b^n$

2 系数问题

① 赋值法

② 求导

四. 统计

1 随机抽样

①简单随机抽样

②系统抽样 等距抽样

③分层抽样 按比例

2 数据分析

①直方图

②茎叶图

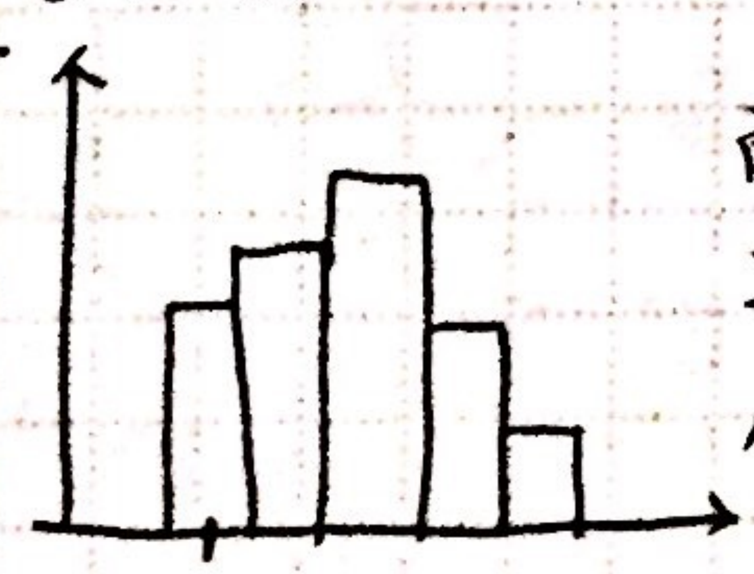
③频率表

3 数据

①平均数 ②众数 ③中位数 ~~④元素~~

⑤方差 $s^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

频率/组距



面积为1

平均数 = 每组中点×面积

众数: 最高中点横坐标

中位数: 面积一半

$x_1+\dots x_n$ 平均数为 $\bar{x}$, 则 $mx_1+a, \dots mx_n+a$

的平均数为 $m\bar{x}+a$

五

1 事件 $0 \le P \le 1$

互斥 → 不能同时发生

e.g. 掷骰子 出现5点或6点

对立 → 互斥的特殊情况

e.g. 奇数点和偶数点

2 几何概型

随机 = 等可能

无数

3. 古典概型

可数

测度以维看变量n个

六 离散型随机变量

1 两点分布

X	1	0
P	p	q

$q=1-p$

2 超几何分布

$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^m}$

① 均值

$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n$

~~$D(X)=\Sigma$~~

② 方差

$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 p_i$

标准差 $\sigma=\sqrt{D(X)}$

△ 若X服从二点分布 $E(X)=p$

$D(X)=p(1-p)$

△ 二项分布 $X \sim B(n,p)$

$E(X)=np$ $D(X)=np(1-p)$

△ 超几何分布

$E(X)=n\frac{M}{N}$ $D(X)=\frac{nM(N-n)(N-M)}{(N-1)N^2}$

常用结论

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$D(aX+b)=a^2 \cdot D(X)$

七. 1. 条件概率 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

A发生的前提下B也发生

2. 独立事件

$P(AB)=P(A)P(B)$